Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
KOLOKWIUM 2

14/01/09

We wszystkich zadaniach mamy do czynienia z układem $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$, gdzie μ jest miarą probabilistyczną na σ-ciele $\mathcal{F}$, a T transformacją zachowującą miarę μ, nie koniecznie odwracalną. Litera f zawsze oznacza mierzalną funkcję rzeczywistą na X.

Zadanie 3. Niech $X = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}_0}$. Niech M będzie macierzą stochastyczną $k \times k$ dla której wszystkie wiersze macierzy M^n zbiegają do jedynego lewostronnego wektora stałego dla M, $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ (wiemy, że jest tak, jeśli choć jedna kolumna pewnej potęgi macierzy M jest ściśle dodatnia). Wykaż, że dla transformacji ,,shift" warunek mieszania zachodzi dla dowolnych cylindrów A i B.

ROZWIĄZANIE: Niech $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$, $(a_i, b_j \in \{1, 2, \dots, k\})$. Zbiór $A \cap T^{-i}B$ ma, dla $i > n$ postać "cylindra"

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, *, *, \dots, *, b_1, b_2, \dots, b_m],$$

gdzie $*$ oznacza dowlony symbol z $\{1, 2, \dots, k\}$ i gwiazdek jest $i - n$. Jest to suma rozłączna wszystkich cylindrów dlugości $i + m$ zaczynających się od bloku A, kończących blokiem B, po wszystkich możliwych blokach wstawionych w miejsce gwiazdek. Miara Markowa pojedynczego bloku, gdzie w miejsce gwiazdek wstawiono blok $[c_1, c_2, \dots, c_{i-n}]$ wynosi

$$p_{a_1} M_{a_1,a_2} M_{a_2,a_3} \cdots M_{a_{n-1},a_n} \\ M_{a_n,c_1} M_{c_1,c_2} M_{c_2,c_3} \cdots M_{c_{i-n-1},c_{i-n}} M_{c_{i-n},b_1} \\ M_{b_1,b_2} M_{b_2,b_3} \cdots M_{b_{n-1},b_n}.$$

Sumując po wszystkich k^{i-n} możliwych blokach $[c_1, c_2, \dots c_{i-n}]$ otrzymamy w środku wyraz macierzy M^{i-n+1} z numerami a_n, b_1. Czyli dostaniemy

$$p_{a_1} M_{a_1,a_2} M_{a_2,a_3} \cdots M_{a_{n-1},a_n} \cdot M^{i-n+1}_{a_n,b_1} M_{b_1,b_2} M_{b_2,b_3} \cdots M_{b_{n-1},b_n}.$$

Wiemy, że macierz M do dużej potęgi ma każdy wiersz bliski wierszowi $p_1, \dots, p_k$, czyli powyższe jest bliskie

$$p_{a_1} M_{a_1,a_2} M_{a_2,a_3} \cdots M_{a_{n-1},a_n} \cdot p_{b_1} M_{b_1,b_2} M_{b_2,b_3} \cdots M_{b_{n-1},b_n}.$$

A to jest dokładnie iloczyn miar cylindrów A i B.

Zadanie 4. Udowodnij jak najprościej, że mieszanie implikuje ergodyczność.

ROZWIĄZANIE: Gdyby układ nie był ergodyczny, to istniałby zbiór niezmienniczy A o mierze $\mu(A) \in (0, 1)$. Wtedy $\mu(A \cap T^{-n}A) = \mu(A)$, co nie dąży do $\mu(A)^2$.

Zadanie 5. Udowodnij, że mieszanie jest równoważne z następującym warunkiem na zespolonej przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$:

$$\langle f|g \circ T^n\rangle \to \langle f|1\rangle\langle 1|g\rangle$$

(czyli $\int f \cdot g \circ T^n \, d\mu \to \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu$).
ROZWIĄZANIE: Z powyższego warunku mieszanie wynika wprost, gdy za f i g przyjmiemy funkcje charakterystyczne zbiorów A i B. W drugą stronę: z mieszania wynika powyższy warunek dla funkcji charakterystycznych. Z liniowości całek po obu stronach można f zastąpić funkcją prostą, a dalej z ciągłości iloczynu skalarnego można za f wstawić dowolną funkcję z L^2 (gdzie funkcje proste leżą gęsto). Narazie g jest funkcją charakterystyczną. Teraz przy ustalonej $f \in L^2$ można znów z liniowości i ciągłości zastąpić g najpierw funkcją prostą, a potem dowolną.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli istnieje funkcja własna o wartości własnej α różnej od 1 (czyli $f \neq 0$ i $\alpha \neq 1$ takie, że $f \circ T = \alpha f$), to układ nie jest mieszający (można korzystać z zadania 5 nawet jak się go nie zrobiło).
UWAGA: Niestety, nie napisałem wyraźnie, że tym razem chodzi o funkcję zespoloną i α też zespolone. W nawiasie pod całkami powinno występować $\bar{g}$ (co oczywiście formalnie nie ma znaczenia, bo $\bar{g}$ można oznaczać przez g, chodzi tylko o to, że w zespolonym iloczynie skalarnym występuje sprzężenie). Zadanie 5 z tym samym dowodem przechodzi dla funkcji zespolonych.
ROZWIĄZANIE: Jeśli f jest funkcją własną o wartości własnej α, to $|f| \circ T = |f \circ T| = |\alpha f| = |\alpha||f|$, stąd $|f|$ jest nieujemną funkcją własną o nieujemnej wartości własnej $|\alpha|$. Z zachowywania miary $\int |f| \, d\mu = \int |f| \circ T \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu$, a co za tym idzie $|\alpha| = 1$. Czyli $|f|$ jest po prostu funkcją niezmienniczą. Jeśli układ nie jest ergodyczny, to nie jest mieszający (zadanie 4) i koniec. Jeśli jest ergodyczny, to funkcja niezmiennicza $|f|$ jest stała. To dowodzi, że f jest ograniczona, zatem $f \in L^2$. Teraz możemy korzystać z zadania 5. Wstawiamy f i $g = \bar{f}$. Mielibyśmy

$$\int f \cdot \alpha^n \bar{f} \, d\mu \to \int f \, d\mu \int \bar{f} \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right|^2 .$$

Dla każdej liczby α o module 1 (czy jest pierwiastkiem z jedności, czy też nie) istnieje podciąg n_k taki, że α^{n_k} zmierza do 1. Po tym podciągu otrzymalibyśmy równość

$$\int |f|^2 \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right|^2 .$$

To po spierwiastkowaniu i dopisaniu mnożnika 1 w postaci $\|1\|$ można zapisać jako $\|f\|\|1\| = \langle f|1\rangle$. Jest to równość w nierówności Schwarza, a to oznacza, że f i 1 są liniowo zależne, czyli, że f jest funkcją stałą. Ale to oznacza, że $\alpha = 1$ (bo funkcje stałe są niezmiennicze, czyli własne o wartości własnej 1), co przeczy założeniu.
UWAGA: Rachunek następujący:

$$\langle f \circ T^n|1\rangle = \int f \circ T^n \cdot 1 \, d\mu = \alpha^n \int f \, d\mu \to \langle f|1\rangle\langle 1|1\rangle = \int f \, d\mu$$

jest NIEWYSTARCZAJĄCY. Na ogół całka z funkcji własnej jest zerowa, więc po obu stronach mamy zero i NIE MA sprzeczności.